УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 681.513.5

Р.А. НЕЙДОРФ, Н.Н.ЧАН

КОМПОЗИЦИОННЫЙ СИНТЕЗ КВАЗИОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Предложен аппроксимационный метод нахождения квазиоптимальных по быстродействию управлений гладкими стационарными системами, удовлетворяющими ряду структурных ограничений. Построена методика синтеза законов реализации обратных связей, реализующих квазиоптимальное по быстродействию управление нелинейными системами. Особенностью методики является то, что она позволяет использовать результаты синтеза системы низкого порядка для построения закона управления системой более высокого порядка. Это позволяет реализовать композиционный синтез САУ теоретически любого порядка на основе эффективного и надежного результата, полученного для динамической системы первого порядка.
Ключевые слова: *динамическая система, закон управления, быстродействие, квазиоптимальность, синтез, аппроксимация, композиционный подход.*

Введение. Проблема оптимизации законов управления является одной из важнейших проблем современной теории автоматического управления (СТАУ). Однако для задач оптимального управления характерно, что их аналитическое решение удается получить лишь в редких случаях. В связи с этим в СТАУ разработаны различные способы нахождения аппроксимационного решения таких задач. Результаты подобного решения называют *законами квазиоптимального управления*. Большинство методов квазиоптимизации быстродействия направлено на аппроксимацию поверхности переключения или на численные методы нахождения моментов переключения [1].

В настоящее время задача синтеза систем, оптимальных по быстродействию, является одной из наиболее актуальных задач теории оптимального управления. Время регулирования входит в число основных качественных характеристик систем автоматического управления. Для многих технических систем уменьшение времени регулирования, т.е. повышение их быстродействия, имеет большое практическое значение. В статье [2] предложен, а в работах [3-5] развит новый подход к построению аналитических моделей ε -квазиоптимального быстродействия для задач управления. Его сущность состоит в статической аппроксимации правой части математической модели (ММ) оптимальной системы, а преимущество заключается в том, что качество управления, оцениваемое временем регулирования, задается в модели параметрически. Варьирование параметров ε позволяет изменять степень квазиоптимальности решения.

Опираясь на введенное в [2] понятие *квазиоптимальности по выбранному критерию,* можно предложить и другие, отличные от сформулированного в [2, 3], подходы к аналитическому нахождению квазиоптималь-

ных по быстродействию управлений. Один из таких методов, ориентированный на приближение быстродействия проектируемой системы к соответствующему показателю уже синтезированной квазиоптимальной системы, но более низкого порядка, предлагается в данной работе.

Постановка задачи. Пусть управляемая система n -го порядка описывается системой дифференциальных уравнений т.н. треугольного вида, т.е.

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_1, x_2, \dots x_{i+1}\right), i = \overline{1, n-1}; \ \dot{x}_n = f_n\left(x_1, x_2, \dots x_n\right) + u, \qquad (1)$$

где функции f_i - дифференцируемы по всем переменным $x_1, x_2, \dots x_{i+1}$, а

$$\partial f_i \big/ \partial x_{i+1} \ \forall\ 0; \ i \quad n \ .$$

Требуется найти управление $u = u(x_1, x_2, \dots x_n)$, переводящее объект из начального состояния $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ в начало координат за близкое к минимальному время t_{kvopt} при ограничениях на все производные переменной состояния и на управление

$$|\dot{x}_i| = x_{im}, i \quad \overline{1, n \quad 1}; \ |u| \quad u_m . \qquad (2)$$

Композиционно-динамический подход к структурно-параметрической оптимизации свойств управляемой системы. Подход строится на предположении, что известно квазиоптимальное по быстродействию управление $u_{n-1}^{kvopt}\left(x\right)$, являющееся гладкой функцией состояний $x = \left(x_1, x_2, \dots x_{n-1}\right)^T$, для системы $(n-1)$-го порядка

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_1, x_2, \dots x_{i+1}\right), i = \overline{1, n-2}; \ \dot{x}_{n-1} = u_{n-1}, \qquad (3)$$

у которой первые $n-2$ функции правых частей, начальные условия $\left(x_1^0, x_2^0, \dots x_{n-1}^0\right)$ и ограничения на переменные состояния $|\dot{x}_i| = x_{im}, i \quad \overline{1, n \quad 2}$ совпадают с аналогичными составляющими исходной системы (1), а на управление u_{n-1} наложено ограничение

$$|u_{n-1}| \quad \left|\dot{x}_{(n-1)m}\right|. \qquad (4)$$

Поскольку повышение порядка динамической системы (ДС) без изменения ее внутренней динамики (взаимосвязей по переменным состояния) приводит к повышению ее инерционности, оценку быстродействия ДС (3) можно рассматривать как естественное ограничение для быстродействия системы (1). Тогда закон движения ДС (3) можно рассматривать как динамический эталон поведения системы (1).

Однако в (1) правая часть $(n-1)$-го уравнения формируется по закону

$$f_{n-1}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right), \qquad (5)$$

тогда как для квазиоптимального движения ее структура должна иметь вид

$$u_{n-1}^{kvopt}\left(x_1, x_2, \dots x_{n-1}\right). \qquad (6)$$

Трансформация выражения (5) в форму (6) в управляемой ДС может быть осуществлена только управляющим воздействием, а его синтез

может быть осуществлен на основе формирования в управляемой ДС инвариантного многообразия

$$f_{n-1}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) - u_{n-1}^{kvopt}\left(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\right) = 0\,, \qquad (7)$$

которое можно рассматривать как предел $\lim_{t\to\infty} e\left(x\left(t\right)\right) = 0$ некоторой гипотетической переменной, представляющей собой ошибку аппроксимации свойств эталонной системы, фактическим законом изменения текущих значений переменных состояния

$$e\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = f_{n-1}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) - u_{n-1}^{kvopt}\left(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\right)\,. \qquad (8)$$

Для обеспечения автоматической системе таких свойств, чтобы при квазоптимальном движении ее $(n-1)$-х координат ошибка (8) стремилась к нулю, при выполнии условия (7) необходимо связать ее движение требованием асимптотической устойчивости по макропеременной $e\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$. Этого можно, например, достичь, потребовав от e свойства

$$\dot e\left(x\right) = -\frac{e\left(x\right)}{\varepsilon}\,, \quad \varepsilon > 0\,, \qquad (9)$$

где ε - параметр настройки решения задачи синтеза [6].

Наложение дополнительных условий на связи управляемой системы возможно только через движение n-й координаты, поскольку остальные связаны постулированным свойством гипотетической подсистемы (3). В свою очередь переменная $x_n\left(t\right)$ зависит от управления $u\left(x\right)$ в (1).

Раскрыть механизм реализации указанной связи можно, если продифференцировать выражение (8) по времени:

$$\dot e = \sum_{i=1}^{n-1} \dot x_i \cdot \frac{\partial e}{\partial x_i} + \dot x_n \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \quad \dot x_n = \left(\dot e - \sum_{i=1}^{n-1} f_i \cdot \frac{\partial e}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\right)^{-1}, \qquad (10)$$

и подставить в уравнение (9) как (8), так и результат дифференцирования (10).

Это позволяет получить искомый закон квазиоптимального управления

$$u^{kvopt}\left(x, \varepsilon\right) = -\left(\frac{e}{\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \cdot \frac{\partial e}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\right)^{-1} - f_n\,, \qquad (11)$$

или, после преобразований,

$$u^{kvopt}\left(x, \varepsilon\right) = \left(\frac{u_{n-1}^{kvopt} - f_{n-1}}{\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \cdot \frac{\partial\left(u_{n-1}^{kvopt} - f_{n-1}\right)}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\right)^{-1} - f_n\,. \qquad (12)$$

Результат (12) показывает, что квазиоптимальное по быстродействию управление системы $n-$ го порядка можно находить через квазиоптимальное управление системы $(n-1)-$ го порядка. Таким образом, по принципу математической индукции теоретически можно получить аналитическое решение поставленной задачи для управляемой системы любого порядка, опираясь, например, на модель квазиоптимального по быстродействию управления первого порядка, предложенную и исследованную в [2-

5] как на эталонную. Условие асимптотической устойчивости предложенного метода также можно доказать математической индукцией, так как для системы (n-1)-го порядка (3) существует квазиоптимальный закон быстродействия, обеспечивающий глобальную асимптотическую устойчивость. Следовательно, существует соответствующая функция Ляпунова $V(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$. Для системы n-го порядка в качестве функции Ляпунова можно выбрать функцию

$$W(x_1, x_2, \ldots x_n) = V(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) + \frac{1}{2}e^2(x_1, x_2, \ldots x_n). \qquad (13)$$

Тогда из (9), (13) можно получить

$$W(x_1, x_2, \ldots x_n) \forall\ 0 \quad x;$$

$$\dot{W}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \dot{V}(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) - \frac{1}{\varepsilon}e^2(x_1, x_2, \ldots x_n) < 0 \forall\ x \quad 0. \qquad (14)$$

Формула (14) показывает, что функция $W(x_1, x_2, \ldots x_n)$ действительно является функцией Ляпунова для исходной системы (1) – асимптотическая устойчивость системы квазиоптимального быстродействия доказана.

Однако сложность аналитических преобразований при существенной нелинейности как системных, так и аппроксимирующих функций, входящих в многообразие (7), ограничивает фактический максимальный порядок синтезируемой системы. В многомерном случае, когда управление является векторным, но имеется возможность декомпозировать исходную систему на треугольные подсистемы, предложенную методику можно применить для каждой подсистемы в отдельности.

Существо и алгоритм реализации разработанного и описанного в данной работе метода наглядно иллюстрирует приводимый ниже демонстрационный пример.

Иллюстрационный пример. ***Синтез квазиоптимального по быстродействию управления движением спутника в центральном поле сил на круговой орбите***. Дифференциальные уравнения динамики плоского движения спутника в поле земного тяготения, согласно [7], имеют вид

$$\dot{y}_1 = y_2;\ \dot{y}_2 = -\frac{\nu}{y_1^2} + y_1 y_4^2 + u_1;\ \dot{y}_3 = y_4;\ \dot{y}_4 = -2\frac{y_4 y_2}{y_1} + \frac{1}{y_1}u_2, \qquad (15)$$

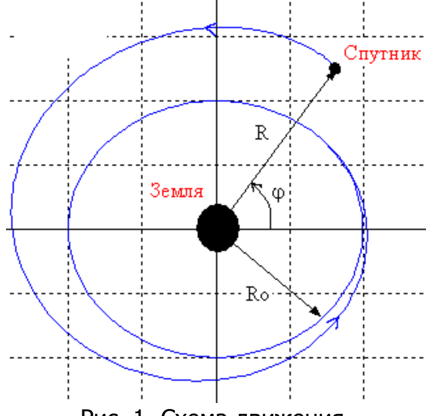


Рис. 1. Схема движения спутника вокруг земли

где $\nu = \nu_0 M$; ν_0 - постоянная всемирного тяготения, M - масса Земли; $y_1 = R$ - расстояние от ее центра до спутника; $y_3 = \varphi$ - угол поворота при движении спутника в полярных координатах относительно земли (рис.1), y_2 -скорость его движения вдоль радиус-вектора R; y_4 - угловая скорость вращения спутника.

Требуется найти управления u_1, u_2, переводящие спутник из некоторого

начального состояния $\left(y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0\right)$ на заданную круговую орбиту $\left(y_1^z = R_0, y_2^z = 0, y_3^z = \mathrm{var}, y_4^z = \varpi_0\right)$ за время, близкое к минимально возможному.

Из результатов, полученных в работе [2], известно, что квазиоптимальное по быстродействию управление с ограничением u^m для системы первого порядка имеет вид $u_{(1)}^{kvopt} \approx \dfrac{-u^m \cdot x}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}}$, $u^m = const > 0$. Поскольку угол вращения $y_3 = \varphi$ может принимать произвольные значения, то можно применить изложенную методику для двух подсистем: $\dot{y}_1 = y_2$; $\dot{y}_2 = -\dfrac{v}{y_1^2} + y_1 y_4^2 + u$ и $\dot{y}_4 = -2\dfrac{y_4 y_2}{y_1} + \dfrac{1}{y_1} u_2$ в отдельности. Это иллюстрируется приводимыми ниже выкладками.

Для первой подсистемы

$$u_1^{kvopt} = \frac{-u_1^m (y_1 - R_0)}{\sqrt{\left(y_1 - R_0\right)^2 + \varepsilon_1^2}}; \quad e = y_2 - u_1^{kvopt}; \quad \dot{e} = -\frac{e}{\varepsilon},$$

откуда

$$u_1 = y_2 + \frac{u_1^m (y_1 - R_0)}{\sqrt{\left(y_1 - R_0\right)^2 + \varepsilon_1^2}} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{v}{y_1^2} - y_1 y_4^2 - \frac{u_1^m y_2 \varepsilon^2}{\left(y_1 - R_0\right)^2 + \varepsilon_1^2 \ ^{1,5}}.$$

Для второй подсистемы

$$u_2^{kvopt} = \frac{-u_2^m (y_4 - \varpi_0)}{\sqrt{\left(y_4 - \varpi_0\right)^2 + \varepsilon_2^2}}, \tag{16}$$

откуда

$$u_2 = \frac{-u_2^m y_1 \left(y_4 - \varpi_0\right)}{\sqrt{\left(y_4 - \varpi_0\right)^2 + \varepsilon_2^2}} + 2 y_2 y_4. \tag{17}$$

Нетрудно заметить, что квазиоптимальные аппроксимации управлений обеспечат также ограничения на производные $|\dot{y}_1| \le u_1^m$, $|\dot{y}_4| \le u_2^m$.

Результаты имитационного моделирования синтезированной САУ на ПЭВМ. На рис.2 изображены переходные процессы для моделирования координат управляемого законами (17) и (18) движения спутника со следующими параметрами: $y_1^0 = 3, y_2^0 = 1, y_3^0 = 5, y_4^0 = 3$; $R_0 = 2$; $\varpi_0 = 4$; $u_1^m = u_2^m = 1$; $\varepsilon = 0.1; v = 100$. На рис. 3 приведены помеченные индексами траектории движения спутника из различных начальных состояний:

$$V_1 = \{y_1^0 = 4, y_2^0 = 1, y_3^0 = 5, y_4^0 = 3\}; \; V_2 = \{y_1^0 = 3, y_2^0 = 1, y_3^0 = 0.5, y_4^0 = 4\};$$
$$V_3 = \{y_1^0 = 2.5, y_2^0 = 0.5, y_3^0 = 4, y_4^0 = 3\};$$
$$V_4 = \{y_1^0 = 4, y_2^0 = 1, y_3^0 = 2, y_4^0 = 2\}.$$

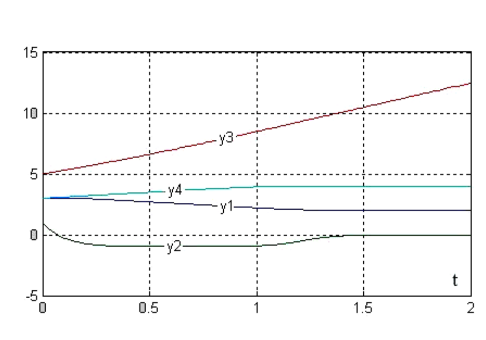


Рис.2. Переходные процессы квазиоптимального движения спутника

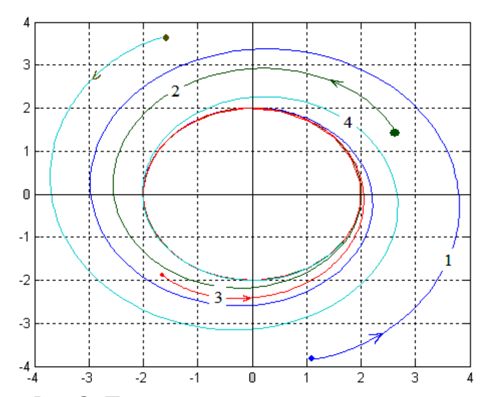


Рис.3. Траектории движения спутника из разных начальных состояний

Выводы. На основе изложенного в статье метода можно аналитически синтезировать квазиоптимальные по быстродействию законы управления для нелинейных объектов любого порядка при ограничениях как на фазовые координаты, так и на само управление. При этом результат решения задачи синтеза может быть представлен аналитической функцией переменных состояния, процесс нахождения которого можно реализовать, в частности, и в виде программного алгоритма для ЭВМ (например, с помощью пакета Symbolic Math Toolbox в MatLab).

Библиографический список

1. *Егупов Н.Д.* Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. / Н.Д. Егупов. Т.2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 746 с.
2. *Нейдорф Р.А.* Нелинейное ускорение динамических процессов управления объектами первого порядка с учетом ограниченности воздействий / Р.А.Нейдорф // Вестник ДГТУ. Управление и диагностика в динамических системах. - Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 1999. - С. 13-21.
3. *Нейдорф Р.А.* Эффективная аппроксимация кусочных функций в задачах квазиоптимального по быстродействию управления / Р.А.Нейдорф //Сб. трудов междунар. науч. конф. "Математические методы в технике и технологиях ММТТ-2000". - СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. Т. 2. - С.18-22
4. *Нейдорф Р.А.* Модели квазиоптимальных законов управления на основе нелинейных функций самоорганизации / Р.А.Нейдорф. // Международная научная конференция «Математические мето-

ды в технике и технологиях ММТТ-14»: Сб.тр.14; СФ МЭИ. – Смоленск, 2001. – Т.2. - С. 36-39.
5. *Нейдорф Р.А.* Нелинейная организация асимптотически устойчивых квазиоптимальных по быстродействию движений / Р.А.Нейдорф. // Докл. Всерос. науч. конф., 3-4 апр. 2003 г. "Управление и информационные технологии". - СПб., 2003. Т.1. - С.189-194.
6. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. / И.В.Мирошник. -СПб.: Питер, 2006. – 272 с.
7. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением / Н.Н.Красовский. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968. - 476 с.

Материал поступил в редакцию 28.08.07.

R.A. NEYDORF, TRAN NGUYEN NGOC

COMPOSITIONAL SYNTHESIS OF TIME-SUBOPTIMAL CONTROL OF HIGHER-ORDER SYSTEMS

It is offered approximate approach to time-suboptimal control for smooth stationary systems with phase constraints are considered. This approach associated with the feedback realization of time-suboptimal control nonlinear systems. The efficiency of the method allows synthesize suboptimal control law by optimal control law of lower systems. In the general case, this approach allows realize compositional synthesis of all nonlinear control systems by effective and reliable results of optimal dynamic systems first order.

НЕЙДОРФ Рудольф Анатольевич (р.1944), заведующий кафедрой «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ПОВТ и АС) ДГТУ, доктор технических наук (1988), профессор (1994). Окончил Новочеркасский политехнический институт (1967) по специальности «Автоматизация и комплексная механизация химико-технологических процессов».
Основные направления научной деятельности: синтез и структурно-параметрическая оптимизация законов управления, процессы обработки информации и управления в технических системах.
Автор около 200 научных работ, издано 11 учебных пособий общим объемом более 80 п.л. Имеет 34 авторских свидетельства на изобретения и 4 свидетельства о регистрации программ.

ЧАН Нгуен Нгок (р.1979), аспирант 2-го года обучения кафедры «ПОВТ и АС» ДГТУ. Окончил ДГТУ (2005) по специальности «Управление и информатика в технических системах».

Научные интересы: современные методы анализа и синтеза системы автоматического управления, моделирование процессов управления на ЭВМ. Автор 6 научных работ, имеет свидетельство о регистрации программы.